

TÈCNiques DE MITJANA ÒPTICA I DIGITAL D'IMATGES AMB BAIXA RELACIÓ SENYAL/SOROLL

D.Ros(*), I.Juvells(+), S.Vallmitjana(+).

(*) Departament de Física Mèdica. Facultat de Medicina. Universitat de Barcelona.

(+) Departament d'Òptica. Facultat de Física. Universitat de Barcelona.

RESUM

Un dels problemes freqüents en la utilització de la imatge com a suport d'informació és la presència de soroll que la degrada. Si el soroll és aleatori, una solució és fer la mitjana de diferents imatges, i així la relació senyal/soroll augmenta en funció del nombre d'imatges que hi intervenen.

En aquest treball es presenten dos mètodes per a efectuar la mitjana. Un d'ells està basat en el filtrat en l'espai recíproc utilitzant un filtre periòdic. L'altre, utilitza la funció de correlació per a determinar el desplaçament relatiu entre dues imatges i, conegut aquest, la mitjana es realitza per superposició directa. S'estudien els nivells de soroll per als quals l'alineació és fiable i es fa una realització pràctica sobre imatges sintètiques.

ABSTRACT

A frequent problem in the use of the image as a support of information is the presence of noise which degrades the images. In the case of random noise one possible solution is to average several images and so the signal/noise ratio increases in accordance with the number of available images.

This paper considers two methods of averaging the image. One is based on filtering in the reciprocal space by using a periodical filter. The other uses the cross-correlation function in order to determine the relative translation between two images and the average is then computed by direct superposition. Noise levels are studied where the alignment is reliable and the process is then applied to synthetic images.

1.- INTRODUCCIÓ

En l'obtenció de la imatge òptica intervenen diferents factors: un dels més importants, lògicament, és el sistema que la forma. Per tant, l'obtenció d'imatges d'alta qualitat passa per utilitzar sistemes d'alta qualitat. De tota manera, hi ha situacions en què, encara que el sistema sigui perfecte, la imatge és de poca qualitat, a causa del soroll de diferents tipus que la degrada, i en molts casos el procés d'obtenció és irrepetible. En aquesta situació, un tractament de la imatge pot permetre de veure característiques no observades en la imatge original.

Una primera possibilitat de tractament, pràcticament l'únic fins fa pocs anys, és per mètodes òptics i ha estat utilitzat en camps diversos. Un dels aspectes més importants d'aquest tractament és que, en realitzar una lent la transformada de Fourier de la imatge, permet una descomposició en freqüències amb totes les possibilitats que això suposa: augment del contrast per atenuació de la llum no difractada, atenuació de determinades freqüències, etc...

La utilització d'ordinadors representa un canvi qualitatiu i quantitatiu fonamental en el tractament d'imatges. Bé que la utilització d'imatges digitals comença el 1921 amb la introducció del primer cable submarí entre Londres i Nova York, no es pot parlar exactament de tractament d'imatges fins al començament dels anys 60, quan comencen a processar-se imatges del satèl·lit Tiros, i se'n troba la confirmació al començament dels anys 70 amb la sèrie de satèl·lits Landsat que subministren imatges multiespectrals. Des de llavors el tractament digital d'imatges ha trobat una extraordinària difusió en els camps més diversos de la ciència i la tècnica. Física, geologia, biologia, medicina, enginyeria ..., són camps en què el tractament digital d'imatges troba aplicacions de gran interès.

El desenvolupament d'algorismes de senyals bidimensionals per al tractament d'imatges adquireix en pocs anys una gran importància, reflex de l'interès que suscita el tema, al qual s'aporten gran quantitat de recursos, tant econòmics com humans. Es pot trobar bibliografia sobre el tema a Pratt (1978) i Huang (1979, 1981a, 1981b). En molts casos són una extensió a senyals bidimensionals d'algorismes i filtres realitzats per a senyals digitals unidimensionals. L'estudi d'aquests últims havia estat també molt desenvolupat al voltant del 1940 per la necessitat de tractar els senyals temporals que s'obtenien mitjançant el radar i el sonar recentment introduïts.

Bé que el tractament de la informació es pot realitzar a l'espai directe, l'anàlisi de Fourier, que permet la descomposició d'un senyal en funcions elementals, proporciona un llenguatge extraordinàriament útil tant per a l'anàlisi teòrica com per a la realització pràctica del tractament. La introducció de la Transformada Ràpida de Fourier (FFT) per Cooley i Tukey (1965) suposa un pas important que ha generalitzat al nivell pràctic l'ús de l'anàlisi de Fourier i l'ha convertida en un punt fonamental en el tractament d'imatges.

Amb l'aparició continua de nous algorismes per al tractament de la informació, els objectius cada cop són més ambiciosos. En molts casos ja no interessa la imatge primària obtinguda pel sistema que la forma, sinó la imatge final elaborada després del tractament. Així, les imatges mèdiques obtingudes per tomografia axial computeritzada (TAC) representen un exemple clar de la nova aplicació del tractament digital d'imatges. A partir d'una sèrie d'imatges primàries obtingudes des de diferents angles es poden obtenir imatges finals corresponents a seccions transversals del cos que fins aquest moment no havien pogut ésser observades.

Les modernes tècniques de formació d'imatges per Ressonància Nuclear Magnètica (RNM) suposen un altre exemple de la manipula-

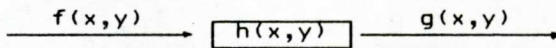
ció de la imatge, que pot presentar avantatges en l'aplicació mèdica.

En Microscòpia Electrònica també es veu la utilitat de les noves tècniques. Cal destacar en aquest camp l'important treball d'Unwin i Henderson (Unwin i Henderson, 1975; Henderson i Unwin, 1975) que realitzen la reconstrucció tridimensional de les proteïnes estructurals que componen la membrana porpra d'*Halobacterium halobium*, les quals formen una estructura periòdica molt indicada per al tractament. Aquest és un exemple il·lustratiu del tractament de la imatge. La reconstrucció tridimensional s'efectua a partir de la informació present en diferents projeccions obtingudes girant la mostra en el microscopi. Les imatges de les diferents projeccions són millorades mitjançant tècniques de Fourier. L'espectre de fases s'obté directament per transformada de Fourier de la micrografia, mentre que l'espectre d'amplitud s'obté a partir de les dades de la difracció d'electrons en el mateix microscopi. L'avantatge que representa això és que llavors l'amplitud no està modulada per la funció de transmissió del microscopi. La combinació en l'ordinador de fase i amplitud proporciona una transformada bidimensional de cada una de les projeccions amb una relació senyal/soroll elevada. Finalment la reconstrucció es realitza utilitzant el fet que les transformades bidimensionals de les projeccions són seccions centrals de la transformada tridimensional. Així, una transformada inversa de Fourier permet, definitivament, de trobar la imatge tridimensional. Veiem, doncs, l'elaborat procés implicat en la reconstrucció, en què s'uneixen la necessitat d'algorismes de càlcul potents i ràpids amb una tècnica experimental molt acurada.

Aquests exemples indiquen que la utilització de tècniques d'anàlisi d'imatges permet d'extreure informació estructural present a la imatge i quantificar-la.

2.- PLANTEJAMENT DEL PROBLEMA

La qualitat de la imatge depèn de diferents factors, que podem agrupar bàsicament en dos: font degradant i soroll. La font degradant es pot assimilar a un sistema amb una entrada, que és la imatge ideal, i una sortida que correspon a la imatge obtinguda.



Si el sistema és lineal i isoplanàtic, podem expressar la sortida (Goodman, 1972):

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y) \quad (2.1)$$

o la seva homòloga a l'espai freqüencial:

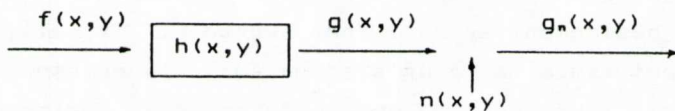
$$G(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v) \quad (2.2)$$

on $h(x,y)$ representa la funció d'extensió del punt i $H(u,v)$ la funció de transmissió del sistema. Coneguda $H(u,v)$, queda determinada $F(u,v)$:

$$F(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)} \quad (2.3)$$

i, mitjançant la transformació inversa de Fourier, es determina la imatge ideal $f(x,y)$. Com que el coneixement de $H(u,v)$ és equivalent al de $h(x,y)$, la determinació de $f(x,y)$ es pot efectuar també a l'espai directe, efectuant la deconvolució de l'expressió (2.1). L'elecció d'un mètode o l'altre dependrà de la facilitat de resolució del problema en els dos espais.

L'efecte del soroll additiu, $n(x,y)$, es pot modelar completant l'esquema anterior.



Llavors

$$g_n(x,y) = g(x,y) + n(x,y)$$

és a dir

$$g_n(x,y) = f(x,y) * h(x,y) + n(x,y) \quad (2.4)$$

o, en forma integral:

$$g_n(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a,b) h(x-a,y-b) da db + n(x,y) \quad (2.5)$$

En aquest cas, per a fer la deconvolució, a més de la funció d'extensió del punt, cal conèixer el soroll superposat, sobre el qual la majoria de vegades es té poca informació. Així, encara que $h(x,y)$ sigui coneguda, la inversió de (2.5) permetrà tan sols una estimació, $f(x,y)$, de la imatge ideal $f(x,y)$, molt més bona com més petit sigui el nivell de soroll.

En general els algorismes de deconvolució són sensibles al soroll en més o menys grau (Frieden, 1974). Si el nivell de soroll és alt, l'estima serà, en general, defectuosa. Hi ha situacions en què la relació senyal/soroll és tan petita que qualsevol estimació que es realitzi sobre les dades aportarà resultats inacceptables.

Un dels camps en què es presenta aquest problema és en Microscòpia Electrònica d'alta resolució, on els nivells de soroll són normalment molt més alts que en òptica fotònica. En condicions d'alta resolució, la font més important de soroll és el soroll quàntic degut al fet que només un nombre finit d'electrons contribueix a la imatge (Misell, 1978). Per un temps d'exposició donat, el nombre d'electrons incidents en un element de la imatge és una variable aleatòria que segueix una distribució de Poisson de valor mitjà p i variància p predits per les teories de formació de la imatge. Si el contrast de la imatge és baix, com en les imatges en camp clar d'objectes prims, el nivell de soroll és pràcticament constant per a tots els elements i pot ésser considerat additiu i independent del senyal (Saxton, 1978).

Per a millorar la relació senyal/soroll es podrien emprar dosis altes d'electrons. El problema és que si el material d'estudi són molècules biològiques, dosis altes en poden afectar l'estructura. L'alta sensibilitat a la radiació significa que la resolució en una imatge no destructiva d'una molècula aïllada està molt limitada pel soroll electrònic.

El problema que pretenem estudiar és el millorament de la resolució en imatges molt contaminades amb soroll. Així, per tal de simplificar el plantejament teòric original, considerem a partir d'ara que el sistema és ideal, amb una funció de transmissió $H(u,v) = 1$.

La idea que ha estat desenvolupada per diferents autors (Unwin i Henderson, 1975; De Rosier i Klug, 1972) és utilitzar la redundància de la informació present en diverses unitats de l'estructura que es vol estudiar. Donada la natura aleatòria del soroll, si es realitza una mitjana el soroll disminuirà en valor mitjà i en variància, mentre que el senyal, determinista, queda invariant.

Si hom vol analitzar molècules que formen agregats cristallins, ja sigui de forma espontània o induïda, la mitjana es pot realitzar mitjançant un filtrat en el pla de Fourier, car els dos espectres estan clarament diferenciats: el del senyal, essent periòdic, solament té un nombre discret de freqüències espacials, múltiples d'una de fonamental, mentre que el del soroll, suposat blanc, és continu i constant en amplitud en tot el pla. La realització d'un filtre que, després d'un procés previ d'indexació, deixi passar només els màxims discrets, permetrà d'eliminar components freqüencials del soroll i, per tant, en un pas posterior, de reconstruir una imatge amb una relació senyal/soroll més alta com més unitats hagin intervingut en el procés.

Un problema més difícil es planteja si només disposem d'imatges individuals aïllades. En aquest treball estudiem dues alternatives per a realitzar la mitjana en aquestes condicions. L'estudi es farà amb imatges sintètiques que ens permetran de controlar els diferents paràmetres que intervenen en el procés.

3.- FILTRAT PER A IMATGES MULTIPLES

3.1. DESCRIPCIÓ DEL DIFRACTÒMETRE EMPRAT

El muntatge utilitzat per a un filtrat de freqüències és el que es presenta a la figura 1 (Moneo et al., 1981). Es pot demostrar (Goodman, 1972) que si sobre l'objecte, situat en el pla O, hi incideix una ona esfèrica convergent cap al pla F, en F, excepte factors de fase, tenim la Transformada de Fourier de l'objecte. La lent L_2 torna a realitzar la TF i, finalment, en el pla de reconstrucció R tenim la imatge que dona L_2 de l'objecte R. Així, el procés de formació de la imatge es pot presentar com dues transformacions de Fourier consecutives. La primera, que correspon a la figura de difracció de l'objecte, ens dona la descomposició espectral i la segona, la imatge final.

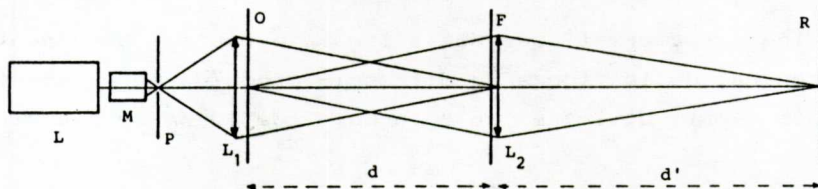


Fig. 1. Esquema del difractòmetre emprat.

O	Pla objecte.	F	Pla de difracció o de Fourier.
R	Pla de reconstrucció.	L	Làser.
M	Lent expansora.	P	Filtre espacial.
L1	Lent difractora.	L2	Lent de reconstrucció.

* Potència de la font làser

La bibliografia (De Rosier i Klug, 1972; Beeston et al., 1972) presenta difractòmetres amb potències compreses entre 1 i 10 mW. L'experiència ens ha demostrat que en el procés de filtrat i reconstrucció és convenient disposar de prou potència, i són recomanables valors superiors a 5 mW. En el nostre cas fem un làser d'He-Ne de 7.2 mW.

* Lent expansora

La seva focal va lligada a la de la lent de Fourier i l'àrea útil del pla objecte. Sovint s'utilitzen objectius de microscopi, per raó de llur focal curta. Nosaltres fem un objectiu Meopta de 24x.

* Filtre espacial ("pin-hole")

Serveix per a uniformitzar la il.luminació. La distribució d'intensitat del feix de làser té estructura gaussiana amb un ondulat superposat. El "pin-hole" realitza un filtrat de freqüències altes no desitjables. La mida d'aquest petit forat circular

depèn de les característiques de la lent expansora i ha d'agafar el màxim central de la figura de difracció produïda per l'obertura d'aquesta lent. Utilitzem un "pin-hole" de $10 \mu\text{m}$ de diàmetre.

* Lent difractora o de Fourier

Produeix la figura de difracció en un pla corresponent al de la imatge del "pin-hole". No és necessari que sigui de focal gaire llarga: són usuals valors compresos entre 50 i 300 mm. Ha d'estar ben corregida d'esfèrica, coma i astigmatisme, i treballar amb augments entre -5 i -20. En el nostre difractòmetre, $f'=85 \text{ mm}$, $N=2.8$.

* Lent de reconstrucció

Interessa que sigui de gran diàmetre perquè pugui recollir el major nombre de freqüències altes. La focal és relativament gran per tal que la imatge tingui una mida adient. És normal una focal d'1 m. Ha d'estar ben corregida d'aberracions d'eix i camp. S'utilitza un objectiu Polarex, $f'=1200 \text{ mm}$, $N=16$.

* Constant del difractòmetre

Es defineix com a $xu = k = \lambda d$, i relaciona les mesures x a l'espai real i les de l'espai de Fourier, u .

Ateses les dimensions normals dels objectes, és interessant una constant de l'ordre d'1.0 a 1.5 mm^2 , que representa una distància d del pla objecte al de difracció d'1.5 a 2.2 m.

és evident l'avantatge d'aquest tipus de difractòmetre, car modificant la distància d es controla la constant k .

* Constant de reconstrucció i augment

Anàlogament es defineix la constant de reconstrucció k' com la relació entre el pla de Fourier i el de reconstrucció:

$$k' = ux' = d'.$$

Com que la constant de difracció és $k = xu = \lambda d$ i la de reconstrucció $k' = ux' = \lambda d'$, l'augment és $\beta' = d'/d = x'/x = k'/k$.

3.2. ESTUDI TEÒRIC I FILTRAT ÒPTIC

A la figura 2 hom representa esquemàticament el difractòmetre descrit. Un feix de llum coherent $U = U_0 \exp(ikz)$ il·lumina l'estructura objecte que està caracteritzada per una transmissió en amplitud $t_{oo}(x_o, y_o)$.

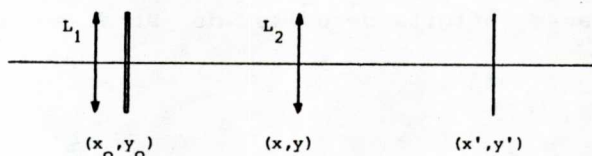


Fig. 2. Difractòmetre.

El filtre es col·loca al pla de Fourier. En tots els casos utilitzarem el mateix filtre, format per una xarxa periòdica de forats circulars distribuïts en un pla. La seva transmissió és

$$t_r(x, y) = t_c(x, y) \cdot \sum_{-M}^M \delta(x - md_x) \cdot \sum_{-N}^N \delta(y - nd_y) \quad (3.1)$$

on d_x i d_y són els intervals en cada direcció, $2M+1$ i $2N+1$ el nombre de forats en cada una d'elles i $t_c(x,y)$ la transmissió d'un cercle, és a dir:

$$t_c(x,y) : \text{cerc} \quad \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{r_0} \quad \begin{cases} = 1 & \text{si } r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \leq r_0 \\ = 0 & \text{si } r > r_0. \end{cases}$$

L'expressió (3.1) es pot escriure de la forma

$$t_r = t_c \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x,y) \text{rect} \left(\frac{x}{A}, \frac{y}{B} \right) \quad (3.2)$$

on $A=(2M+1) \cdot d_x$ i $B=(2N+1) \cdot d_y$ són les dimensions del filtre, $\sum \sum \delta(x,y)$ és una xarxa infinita de deltes de Dirac en dues dimensions, i

$$\text{rect} \left(\frac{x}{A}, \frac{y}{B} \right) \quad \begin{cases} = 1 & \text{si } \left| \frac{x}{A} \right| \leq \frac{1}{2} ; \left| \frac{y}{B} \right| \leq \frac{1}{2} \\ = 0 & \end{cases}$$

és el rectangle que limita el filtre.

La idea bàsica d'aquest estudi és que la transformada de Fourier d'un senyal discret és periòdica. Llavors, en col·locar el filtre anterior en el pla de Fourier, la imatge obtinguda en la reconstrucció serà una reproducció periòdica de l'objecte original.

* Filtrat d'un objecte únic

L'amplitud transmesa per l'objecte serà $U. t_{..} (x_0, y_0)$. La seva transformada de Fourier, $U. F(t_{..})$.

Després de filtrar, l'amplitud que travessa el pla de Fourier serà

$$U. F(t_{..}) \left[F(t_c) \cdot \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) \text{rect} \left(\frac{x}{A}, \frac{y}{B} \right) \right] \right] \quad (3.3)$$

La reconstrucció suposa una nova transformada de Fourier i, per tant, l'amplitud en el pla imatge serà proporcional a

$$U. t_{..} \cdot \left[F(t_c) \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x', y') \cdot \text{sinc}(Ax', Bx') \right] \right] \quad (3.4)$$

on

- $F(t_c)$, és el disc d'Airy, representat per la funció de Bessel $r_0 J_1(2r'r_0)/r'$, essent $r'^2 = x'^2 + y'^2$

- $\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(x', y')$ és la xarxa recíproca de la del filtre

- $\text{Sinc}(Ax', By')$ és la figura de difracció del rectangle que limita el filtre.

El claudàtor representa, per tant, una xarxa de punts (deltes de Dirac), distribuïts en el pla imatge amb una creu de difracció a cada punt i modulats tot pel disc d'Airy. La convolució amb $t_{..}$ indica que en el pla imatge tindrem imatges múltiples de

filtre. Hom pot observar que a cada punt de la xarxa tenim la convolució de t_{00} amb la funció sinc. Així, la limitació del filtre es tradueix en una pèrdua de nitidesa, més acusada com més petites siguin les seves dimensions; si el filtre fos infinit, les imatges serien nítides.

Les imatges múltiples apareixen a la zona limitada pel disc d'Airy, imatge de difracció dels forats del filtre. Per tant, com més petits són els forats, més gran és la zona en què tindrem imatges múltiples.

A la figura 3 es veuen les imatges múltiples obtingudes a partir d'una lletra G.

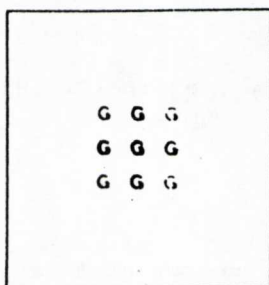


Fig. 3. Imatges múltiples obtingudes a partir d'una sola G.

Així, doncs, amb aquest tipus de filtrat obtenim imatges múltiples d'un objecte donat, distribuïdes segons una xarxa periòdica, recíproca de la del filtre. Això suggereix una aplicació immediata. Suposem que, pel mètode que sigui, podem obtenir diferents imatges d'un objecte (o objectes anàlegs), cada un d'ells amb informació incompleta, i a més afectades totes d'un soroll aleatori (aquestes imatges són corrents en microscòpia electrònica d'alta resolució). Si distribuïm les diferents imatges segons

una xarxa periòdica bidimensional d'intervals d_x i d_y , podem escriure l'estructura objecte de la forma:

$$t_{ob}(x_0, y_0) = \sum_{-M}^M \sum_{-N}^N t_{ob_{mn}}(x_0 - md_{x_0}, y_0 - nd_{y_0}) + n(x_0, y_0) \quad (3.5)$$

on $t_{ob_{mn}}$ és cada una de les imatges incompletes, $2M+1$ i $2N+1$ el nombre d'imatges en cada direcció i $n(x_0, y_0)$ el soroll aleatori. Si ara fem la TF i la filtrem amb un filtre tal que la seva xarxa coincideixi amb la xarxa recíproca de la de l'objecte, tindrem:

$$U_0 \left[\sum_{-M}^M \sum_{-N}^N t_{ob_{mn}}(x' - md_{x_0}, y' - nd_{y_0}) + n(x', y') \right] * \left[F(t_c) \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x', y') * \text{sinc}(Ax', By') \right] \right] \quad (3.6)$$

és a dir, la convolució de l'objecte amb la transformada del filtre. Podem separar l'expressió (3.6) en dues parts: la segona és la convolució del soroll aleatori $n(x', y')$ amb el segon parèntesi, que donarà una uniformització del soroll en tota la imatge. El primer donarà imatges múltiples de la xarxa objecte. Així, a la zona central se superposen els diferents trossos de l'objecte i, si entre tots contenen la informació completa, aquest apareixerà sencer, amb diferents intensitats a cada tros, segons el nombre de vegades que aparegui repetit aquest tros en l'estructura original. Així, el terme de senyal, determinista, quedarà reforçat en relació al terme de soroll, aleatori.

A la figura 4 hom representa l'estructura objecte i la reconstrucció.



Fig. 4a. Estructura inicial



Fig. 4b. Reconstrucció

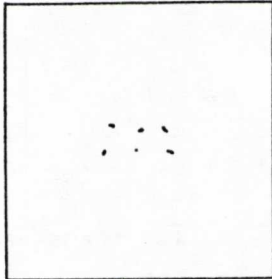


Fig. 5a. Estructura inicial

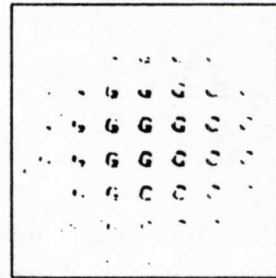


Fig. 5b. Reconstrucció

Per veure que, efectivament, a cada G de la imatge final hi ha informació de totes les de l'objecte, a la figura 5 es veuen les imatges múltiples obtingudes a partir de 6 trossos que completen justament una sola lletra G.

El mètode de filtrat que hom ha presentat es pot realitzar fàcilment amb ordinador. La imatge es considera llavors descomposta en $N \times N$ elements discrets de dimensió $p \times p$ distribuïts segons una matriu que constitueix la rèplica digital de la imatge.

L'aplicació del filtre és en aquest cas immediata, car només cal multiplicar els diferents punts de la TF per 0 o per 1 segons si es vol filtrar o no.

L'estructura objecte original estava constituïda per 16 G més un soroll blanc de mitjana nul·la i amplitud 3. Per a generar el soroll hem utilitzat el mètode descrit per Salvat i Parellada (1982) per a generar nombres pseudoaleatoris. Hem quantificat la relació senyal /soroll com a arrel quadrada del quocient d'energia mitjana del senyal (considerat de valor mitjà zero; si no, cal restar el valor mitjà a l'amplitud en cada punt), i la variància del soroll, seguint la definició utilitzada per diferents autors (Saxton i Frank, 1977). Amb aquesta definició l'objecte té una relació senyal/soroll de 0.337. A la figura 6 es veu l'objecte original i la imatge després de filtrar. La relació senyal/soroll en aquesta última és de l'ordre de \sqrt{N} , essent N el nombre d'imatges que intervenen en el procés de mitjana, tal com calia esperar teòricament (Richards, 1967).

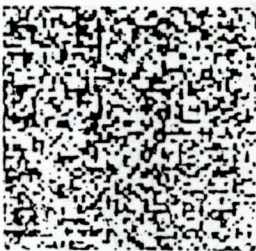


Fig. 6a. Estructura inicial.
($\alpha=0.337$)

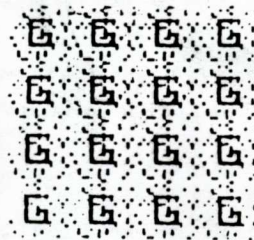


Fig. 6b. Reconstrucció.
($\alpha=1.266$)

4. ALINEACIÓ I MITJANA D'IMATGES AMB ORDINADOR.

4.1. ALINEACIÓ BIDIMENSIONAL.

Bé que el mètode presentat dona resultats satisfactoris, l'alineació segons una xarxa pot resultar difícil en imatges amb nivells de soroll importants. Per tal de fer una bona alineació, caldria trobar un mètode automàtic i precís per a buscar el desplaçament que hi ha entre dues imatges. Un cop conegut aquest desplaçament es pot realitzar el procés anterior o bé, si es realitza amb ordinador, fer la mitjana per superposició directa.

El problema ha estat tractat per Saxton i Frank (1977), que proposen la utilització de la correlació bidimensional com a mètode d'alineació.

L'èxit dels mètodes de correlació per a senyals contaminats amb soroll és degut a la mitjana que es realitza i al fet que en el cas de soroll no correlacionat amb el senyal, la funció de correlació de les funcions $f(x,y)$ i $g(x,y)$ amb soroll coincideixi amb la funció de correlació de $f(x,y)$ i $g(x,y)$. En efecte, siguin

$$f'(x,y) = f(x,y) + n_1(x,y)$$

$$g'(x,y) = g(x,y) + n_2(x,y)$$

on $f(x,y)$ i $g(x,y)$ són els senyals sense soroll i $n_1(x,y)$ i $n_2(x,y)$ dues realitzacions del soroll. La funció de correlació serà:

$$f'(x,y) * g'(x,y) = f(x,y) * g(x,y) + f(x,y) * n_2(x,y) + n_1(x,y) * g(x,y) + n_1(x,y) * n_2(x,y)$$

En cas de soroll no correlacionat amb el senyal, els tres últims termes són nuls, i les dues funcions de correlació coincideixen. Així, el desplaçament calculat a partir del màxim de la

funció de correlació es podrà determinar amb precisió. En les situacions reals és difícil pensar que no existeixi correlació entre senyal i soroll, però en molts casos la contribució dels tres termes no serà significativa.

El problema important és que la realització de la correlació bidimensional representa un temps de càlcul elevat en petits ordinadors, encara que es realitzi mitjançant la transformada de Fourier.

$$\begin{array}{ccc}
 f(x,y) & g(x,y) & \xrightarrow{*} & f(x,y) * g(x,y) \\
 \downarrow \text{TF} & \downarrow \text{TF, conjugació} & & \uparrow \text{TF}^{-1} \\
 F(u,v) & G^*(u,v) & \xrightarrow{\quad} & F(u,v) \cdot G^*(u,v)
 \end{array}$$

A causa de l'extrapolació periòdica implícita en l'algorisme de Cooley i Turkey (1965), si volem que la correlació sigui correcta, sense que apareguin falsos encavalcaments, cal orlar la matriu amb zeros fins a una dimensió doble de l'original (Hawkes, 1980), i cal restar a les dades el valor mitjà per tal que no apareguin efectes de cantó associats a la discontinuïtat, que podrien tenir conseqüències importants si el valor mitjà de les dades fos gran.

El fet que les matrius hagin d'ésser de doble dimensió que les inicials contribueix a augmentar el temps de càlcul en un factor important. Això imposa limitacions quant a l'aplicabilitat del mètode de correlació bidimensional per a l'alineació d'imatges en petits ordinadors. Aquesta segona part del treball presenta una alternativa senzilla a la qüestió plantejada.

4.2. REDUCCIÓ DEL PROBLEMA BIDIMENSIONAL A DOS D'UNIDIMENSIONALS

4.2.1. Projeccions

El problema bidimensional plantejat és trobar el vector de desplaçament $\vec{r}(a,b)$ entre dues imatges caracteritzades per les funcions $f(x,y)$ i $g(x,y)$. En el cas ideal d'imatges sense soroll es compleix $g(x,y) = f(x+a,y+b)$.

Com que el vector $\vec{r}(a,b)$ queda determinat coneixent-ne els components a i b , pensem que una solució senzilla i ràpida pot ésser determinar separatament a i b . L'alternativa que proposem és projectar les dues funcions $f(x,y)$ i $g(x,y)$ sobre dos eixos i buscar l'alineació de les funcions unidimensionals resultants (figura 7).

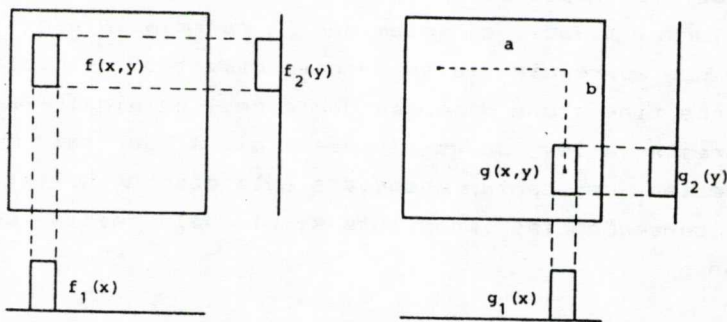


Fig. 7. Projeccions unidimensionals.

Prenent els eixos perpendiculars, el problema d'alineació es converteix en dos problemes unidimensionals molt senzills, ja que per trobar les projeccions només cal sumar files i columnes.

L'alineació unidimensional s'aconsegueix mitjançant correlació. El desplaçament a s'obté a partir de $f_1(x) * g_1(x)$ i el b a partir de $f_2(y) * g_2(y)$, tal com és indicat esquemàticament a la figura 8.

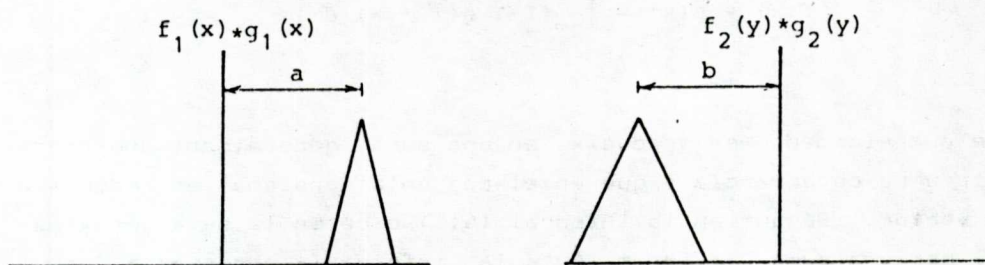


Fig. 8. Funcions de correlació de les projeccions horitzontals i verticals.

Segons que el màxim de la funció de correlació estigui a la dreta o l'esquerra de l'origen de coordenades, el desplaçament serà positiu o negatiu, i s'han d'agafar els desplaçaments a i b per a superposar la imatge $g(x,y)$ amb $f(x,y)$.

Així, independentment de la dimensió de la matriu, només calen tres transformades de Fourier per a trobar el desplaçament horitzontal i tres per al vertical. En total, per a matrius de $N \times N$ elements, per a aconseguir l'alineació s'han d'efectuar sis

transformades de Fourier de $2N$ punts i $2N$ multiplicacions complexes. L'avantatge en temps de càlcul i en capacitat de memòria central és important i més com més gran sigui N .

4.2.2. Coeficient de correlació

Per a calcular la funció de correlació entre dues funcions reals $f(x)$ i $g(x)$, cal avaluar la integral

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(\tau + x) d\tau \quad (4.1)$$

que numèricament es tradueix en una suma, generalment anomenada matriu de covariància i que en el cas unidimensional es redueix a un vector. Bé que en la integral (4.1) o bé en la seva aproximació per una suma ja tenim tota la informació necessària per a determinar el desplaçament, és convenient normalitzar la funció de correlació per a poder comparar els resultats corresponents a diferents funcions.

Per això utilitzem el coeficient de correlació, definit per:

$$r_p = \frac{\sum_{j=1}^N f_j \cdot g_j - \bar{f} \bar{g} N}{(F - \bar{f}^2 N)^{\frac{1}{2}} (G - \bar{g}^2 N)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.2)$$

on

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j$$

$$\bar{g} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g_j$$

$$F = \sum_{j=1}^N f_j^2$$

$$G = \sum_{j=1}^N g_j^2$$

i així r_p varia entre +1 i -1, i és +1 quan les funcions $f(x)$ i $g(x)$ són idèntiques.

És fàcil de demostrar que amb aquesta definició r_p és invariant sota transformacions lineals. En efecte, sigui $f'_j = af_j + b$:

$$r'_p = \frac{\sum_{j=1}^N (a f_{j-p} + b) g_j - (a \bar{f} + b) g N}{\left(\sum_{j=1}^N (a f_j + b)^2 - (a \bar{f} + b)^2 N \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^N g_j^2 - \bar{g}^2 N \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$r'_p = \frac{a \left(\sum_{j=1}^N f_{j-p} g_j - \bar{f} \bar{g} N \right)}{a \left(\sum_{j=1}^N f_j^2 - \bar{f}^2 N \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^N g_j^2 - \bar{g}^2 N \right)^{\frac{1}{2}}} = r_p$$

La invariància respecte a transformacions lineals implica que el valor de r_p no serà afectat per canvis d'escala.

Per a la programació de l'algorisme, es calcula la correlació amb la TF. La forma més senzilla per a calcular (4.2) consisteix a treballar amb funcions de mitjana nul·la. En aquestes condicions, F i G representen l'energia dels senyals i es poden calcular a l'espai de Fourier d'acord amb el teorema de Parseval (Goodman, 1972).

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(u) du$$

4.2.3. Relació amb el cas bidimensional.

Abans de veure l'aplicació del mètode, vegem la relació que existeix entre el cas bidimensional i els dos unidimensionals als quals hem traslladat el problema de l'alineació.

No és difícil de demostrar que la TF de la projecció d'una imatge bidimensional sobre un eix és una secció central de la TF bidimensional.

En efecte, si $f(x,y)$ representa la imatge bidimensional i $F(u,v)$ la seva transformada de Fourier:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \exp(-i2\pi(xu + yv)) dx dy$$

Una secció central serà, per exemple, fer $v=0$

$$F(u,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \exp(-i2\pi x u) dx dy$$

$$F(u,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x,y) dy] \exp(-i2\pi x u) dx$$

posant $f_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy$

$$F(u,0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_p(x) \exp(-i2\pi x u) dx$$

Així, la secció central $F(u,0)$ és la transformada de Fourier de la funció unidimensional $f_p(x)$ que correspon a la projecció de la funció $f(x,y)$ sobre l'eix x .

Resulta, doncs, que aconseguim l'alineació a partir de la informació corresponent a les dues seccions centrals que coinci-

deixen amb el eixos cartesianes centrats a l'origen de la transformada.

4.3. PROVA DEL MÈTODE AMB UN SOROLL D'AMPLITUD 3

Per tal de provar la utilitat del mètode en la determinació de l'alineació, s'han utilitzat 16 imatges sintètiques de 64x64 elements corresponents a una lletra G en diferents posicions, a les quals hom ha afegit un soroll uniforme d'amplitud 3.

El procés que hem seguit consisteix a determinar el desplaçament entre una imatge escollida a l'atzar que s'agafa com a referència i una segona imatge; coneguts els desplaçaments a i b es realitza la superposició de les dues imatges i s'efectua la mitjana. Agafant la imatge mitjana com a nova referència es repeteix el procés amb una tercera imatge.

A la figura 9 hom presenta la correlació entre dues imatges, ambdues sense soroll.

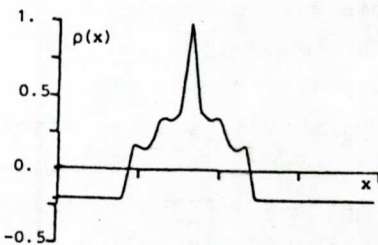


Fig.9a. Funció de correlació horitzontal.

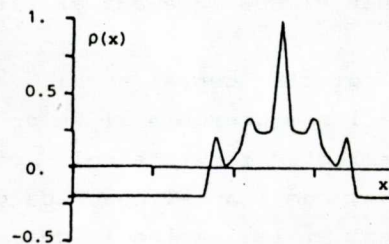


Fig. 9b. Funció de correlació vertical.

A la figura 10 veiem la correlació entre les dues mateixes imatges amb un soroll d'amplitud 3.

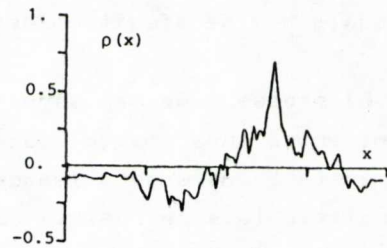
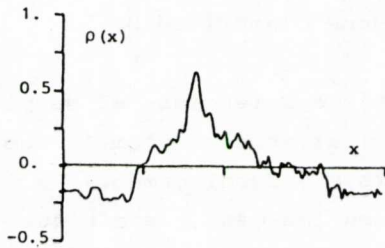


Fig. 10a. Funció de correlació horitzontal.

Fig. 10b. Funció de correlació vertical

La relació senyal/soroll per a l'amplitud de soroll 3 correspon a 0.34, trobada fent la mitjana de totes les realitzacions. A la figura 11 hom representa la imatge de referència original i les corresponents a 4, 8 i 16 mitjanes. Els resultats de l'alineació han estat completament satisfactoris i ha quedat determinat el desplaçament exacte en tots els casos.

La relació senyal/soroll va millorant progressivament. A la taula 1 hom presenta el valor mitjà del soroll, la variància i la relació senyal/soroll estimada, segons la definició ja comentada, com l'arrel quadrada del quocient de l'energia mitjana del senyal i la variància del soroll. Les característiques del senyal que correspon a la imatge sense soroll són: valor mitjà de 9.77×10^{-2} i variància de 8.812×10^{-2} .

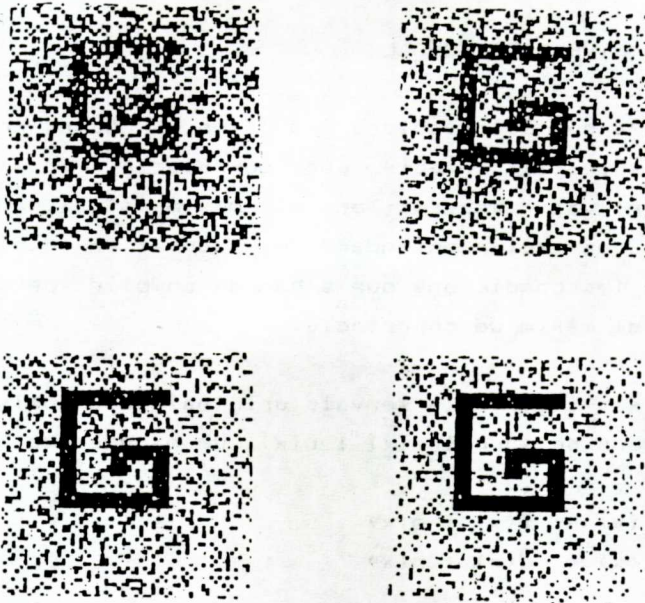


Fig.11 Imatges obtingudes després de fer la mitjana de diferents realitzacions : a) Original b) Mitjana de 4 imatges c) Mitjana de 8 imatges d) Mitjana de 16 imatges

TAULA 1

	<u>V.Mitjà soroll</u>	<u>Variància soroll</u>	<u>Relació s/n</u>
Referència	-2.51×10^{-2}	0.7476	0.3434
Mitj. 4	-2.32×10^{-2}	0.1852	0.6899
Mitj. 8	8.32×10^{-3}	0.0958	0.9592
Mitj.16	-1.91×10^{-3}	0.0462	1.3805

Hom pot apreciar que la relació senyal/soroll millora aproximadament segons \sqrt{N} , essent N el nombre d'imatges emprades, cosa que està d'acord amb l'estadística esperada.

4.4 LÍMITS DEL NIVELL DE SOROLL

El problema que cal resoldre és fins a quins nivells de soroll és fiable l'alineació per correlació. Per això haurem d'imposar que el valor esperat en el màxim sigui sensiblement superior a la desviació estàndard del soroll en aquell punt, i així obtindrem les condicions que s'han de complir per a la detectabilitat del màxim de correlació.

Siguin $f(x)$ i $g(x)$ els senyals originals als quals se sumen les realitzacions de soroll $m(x)$ i $n(x)$, de manera que

$$f'(x) = f(x) + m(x)$$

$$g'(x) = g(x) + n(x)$$

Considerem que $f'(x)$ i $g'(x)$ són de mitjana nul·la, així com el soroll. La suma de correlació en el màxim es pot escriure:

$$r_p = \sum_j (f_{j-p} + m_{j-p}) (g_j + n_j) \quad (4.3)$$

El valor esperat de r_p serà:

$$E(r_p) = \sum_j E((f_{j-p}, g_j) + (f_{j-p}, n_j) + (m_{j-p}, g_j) + (m_{j-p}, n_j)) \quad (4.4)$$

on s'ha tingut en compte que l'operador valor esperat commuta amb la suma. En la hipòtesi de soroll no correlacionat amb el senyal els tres últims termes tenen un valor esperat nul, de manera que:

$$E(r_p) = \sum_j E(f_{j,p}, g_j)$$

i tenint en compte que f i g són iguals per al desplaçament p , es pot escriure:

$$E(r_p) = Ns^2 \quad (4.5)$$

on $s_j = f_{j,p} = g_j$ i $s^2 = \langle fg \rangle$

Com que els diferents termes de (4.3) són independents, l'operador variància commuta amb la suma, i la variància de r_p es pot escriure:

$$\text{var}(r_p) = \sum_j (f_{j,p}^2 \sigma^2 + g_j^2 \sigma^2 + \sigma^4)$$

on σ^2 és la variància del soroll, considerant que tots dos senyals tenen la mateixa estadística de soroll.

$$\text{var}(r_p) = Ns^2\sigma^2 + Ns^2\sigma^2 + N\sigma^4$$

Si indiquem per $\alpha = S/\sigma$ la relació senyal/soroll

$$\text{var}(r_p) = N\sigma^4(2\alpha^2 + 1) \quad (4.6)$$

Per a assegurar una bona detecció del màxim de correlació imposem que el quadrat del valor esperat sigui 16 vegades més gran que la variància (Saxton, 1978), que equival a fer que el valor esperat sigui quatre vegades més gran que la desviació estàndard del soroll. Així:

$$\begin{aligned} E^2(r_p) &\geq 16 \text{ var}(r_p) \\ N^2s^4 &\geq 16 N \sigma^4 (1+2\alpha^2) \\ N \alpha^4 - 32 \alpha^2 - 16 &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Resolent l'equació per a les projeccions ($N=64$), hom troba

que la relació senyal/soroll ha d'ésser més gran que 0.9, mentre que si l'alineació es fa per correlació bidimensional ($N=64 \times 64$), la relació senyal/soroll seria més gran que 0.25.

A la taula 2 hom presenta la relació senyal/soroll per a l'exemple tractat. Els valors han estat trobats calculant el valor mitjà de les corresponents relacions senyal/soroll a les 16 imatges.

	<u>Energia senyal</u>	<u>Var.soroll</u>	<u>s/n (α)</u>
Imatge bidimens.	8.812×10^{-2}	0.7476	0.3434
Projecció eix x	1.945×10^{-2}	1.197×10^{-2}	1.2924
Projecció eix y	1.982×10^{-2}	1.113×10^{-2}	1.3478

TAULA 2

Hom pot observar que tant en el cas bidimensional com en els dos unidimensionals, els valors són superiors als mínims exigits. Això significa que, encara que les hipòtesis de no correlació senyal/soroll no es compleixin rigorosament, el marge és suficient per a explicar els bons resultats obtinguts. En aquestes condicions, el valor esperat és de l'ordre de 7 vegades més gran que la desviació estàndard del soroll, com es pot comprovar substituint els valors dels paràmetres s , σ i α a les expressions (4.5) i (4.6).

4.5. PROVA DEL CAS LÍMIT TEÒRIC

Hem establert que el límit inferior per a la relació senyal/soroll en imatges de 64×64 elements és 0.25 si l'alineació es realitza per correlació bidimensional i 1 en el cas de projeccions unidimensionals. Es tracta de veure el resultat de l'alineació per correlació de les projeccions en el límit teòric del soroll.

Per veure quina era l'amplitud màxima de soroll perquè les condicions de detectabilitat fossin les mínimes, generarem imatges amb amplituds de soroll 4 i 5. Els valors dels diferents paràmetres es presenten a la taula 3.

	Amp. Soroll	Energia Senyal	Variància Soroll	Relació s/n	$\frac{E(r_p)}{\text{var}(r_p)}^{1/2}$
Im.Bidimensional	4	8.812×10^{-2}	1.3290	0.2575	4
Projecció eix x		1.945×10^{-2}	2.1276×10^{-2}	0.9693	4
Projecció eix y		1.982×10^{-2}	2.0124×10^{-2}	1.0108	4.5
Im.Bidimensional	5	8.812×10^{-2}	2.0766	0.2060	2.5
Projecció eix x		1.945×10^{-2}	3.3243×10^{-2}	0.7755	3
Projecció eix y		1.982×10^{-2}	3.1448×10^{-2}	0.8112	3

TAULA 3

De l'anàlisi dels resultats arribem a la conclusió que les condicions límit teòriques es donen per a una amplitud de 4. Cal considerar, així mateix, que les condicions límit estaven deduïdes en base a la no correlació senyal/soroll, de manera que el soroll d'amplitud 4 ja pot portar a resultats no correctes.

En realitat, en aquest cas l'alineació no fou perfecta. En dues imatges es produïren errors d'alineació d'un punt. De tota manera aquest error és petit i la imatge mitjana no diferia de la ideal. A la figura 12 es presenta la imatge de referència original i la mitjana trobada de les 16 imatges. La relació senyal/soroll en aquest cas és d' 1.032.

En un refinament posterior del mètode, pensarem que una bona mesura de seguretat seria recalcular els desplaçaments utilitzant com a referència la imatge mitjana trobada. En fer-ho, tots els desplaçaments excepte un dels anteriorment esmentats foren correctes. Cal dir que el resultat erroni correspon a un desplaça-

ment horitzontal, que com es pot veure a la taula té una relació senyal/soroll més baixa que la vertical i per sota del límit.

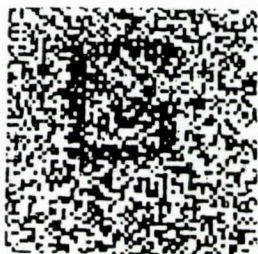


Fig. 12a. Imatge original
($\alpha = 0.2577$).



Fig. 12b. Mitjana de 16 imatges
utilitzant els desplaçaments
calculats ($\alpha = 1.032$).

4.6. DETERMINACIÓ DEL NIVELL DE SOROLL

Per a acabar aquest estudi, queda un aspecte que cal comentar. En el cas en què hom coneix la relació senyal/soroll, l'expressió (4.7) proporciona un mètode senzill per a orientar-nos quant a la fiabilitat dels desplaçaments trobats. De tota manera, és freqüent que la relació senyal/soroll sigui difícil o impossible de conèixer a priori i en aquest cas (4.7) tindrà un valor teòric però no pràctic.

Seria útil disposar d'algun mètode que permetés d'estimar α i així tindriem un bon índex de fiabilitat.

Frank i Ali (1975) relacionen α amb l'alçada del coeficient de correlació r en el màxim mitjançant l'expressió:

$$r = \alpha^2 / (1 + \alpha^2) \quad (4.8)$$

Així, la mateixa correlació que serveix per a determinar el desplaçament proporciona un mètode per a estimar a posteriori la relació senyal/soroll.

La deducció de (4.8) no és difícil i suposa, novament, acceptar que no hi ha correlació senyal/soroll. Per simplicitat, suposem que soroll i senyal són de mitjana nul·la:

$$f'(x) = f(x) + m(x) \qquad g'(x) = g(x) + n(x)$$

Si el màxim es produeix per un desplaçament p , el coeficient de correlació en aquest punt serà

$$r_p = \frac{\sum_{j=1}^N (f_{j-p} + m_{j-p}) \cdot \sum_{j=1}^N (g_j + n_j)}{(\sum_{j=1}^N (f_j + m_j)^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{j=1}^N (g_j + n_j)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Si no hi ha correlació senyal/soroll, els termes creuats s'anul·len i

$$r_p = \frac{\sum_{j=1}^N f_{j-p} \cdot g_j}{(\sum_{j=1}^N f_j^2 + \sum_{j=1}^N m_j^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{j=1}^N g_j^2 + \sum_{j=1}^N n_j^2)^{\frac{1}{2}}}$$

en ésser $f=g$, $\sum_{j=1}^N f_j^2 = \sum_{j=1}^N g_j^2 = N \langle f^2 \rangle$

Si m i n corresponen a dues realitzacions de soroll tindran la mateixa estadística:

$$\sum_{j=1}^N m_j^2 = \sum_{j=1}^N n_j^2 = N\sigma^2$$

Com que p és el desplaçament per al qual hi ha superposició de les dues imatges:

$$\sum_{j=1}^N f_{j-p} g_j = \sum_{j=1}^N f_j^2 = N \langle f^2 \rangle$$

Així:

$$r = \frac{\langle f^2 \rangle}{\langle f^2 \rangle + \sigma^2}$$

Dividint per $\langle f^2 \rangle$ i tenint en compte que

$$\langle f^2 \rangle / \sigma^2 = \alpha^2$$

$$r = 1 / (1 + 1/\alpha^2) = \alpha^2 / (1 + \alpha^2)$$

tal com volíem demostrar.

D'aquí pot calcular-se α :

$$\alpha = (r / (1 - r))^{1/2} \quad (4.10)$$

Per a veure si realment les prediccions teòriques es corresponen amb els resultats reals, hem estimat α sobre les 16 imatges. D'altra banda, a partir de (4.10) també es pot trobar α . Confrontant els valors trobats amb els reals estimats sobre les 120 possibles realitzacions en comparar totes les imatges entre elles, tindrem una prova de la utilitat de la correlació per a estimar la relació senyal/soroll. Com es pot veure a la taula 4,

els resultats són totalment compatibles.

<u>Amplitud</u>	<u>Alçada màx.</u>	<u>α estimada</u>	<u>α real</u>
3	0.675	1.4	1.32
4	0.56	1.12	1
5	0.46	0.91	0.8

TAULA 4

5. BIBLIOGRAFIA

- BEESTON B.E.P., HORNE R.W., MARKHAM R. (1972): Practical Methods in Electron Microscopy. Vol.1. Part.II. "Electron Diffraction and Optical Diffraction Techniques". North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Londres.
- COOLEY J.W., TUKEY J.W., Math. Comp. (1965) 19 297.
- DE ROSIER D.J., KLUG A., J.Mol.Biol. (1972) 65 469.
- FRANK J., AL-ALI L., Nature (1975) 256 376.
- FRIEDEN B.R., J.Opt.Soc.Am. (1974) 64 682.
- GOODMAN, J.W. (1972): Introduction a l'Optique de Fourier et a l'Holographie. Masson et Cie, Paris.
- HAWKES, P.W. (ed.) (1980): "Topics in Current Physics. Computer processing of electron microscope images". Springer-Verlag, Berlin, Heildelberg, Nova York.
- HENDERSON R., UNWIN P.N.T. Nature (1975) 257 28.
- HUANG T.S. (ed.) (1979): Topics in Applied Physics. Vol.6. "Picture processing and digital filtering". 2nd Edition. Springer-Verlag, Berlin, Heildelberg, Nova York.
- HUANG T.S. (ed.) (1981) (a): Topics in Applied Physics. Vol.42. "Two dimensional digital signal processing. I Linear Filters". Springer-Verlag, Berlin, Heildelberg, Nova York.
- HUANG T.S. (ed) (1981) (b): Topics in Applied Physics. Vol.43. "Two-dimensional digital signal processing. II Transforms and Median Filters". Springer-Verlag, Berlin, Heildelberg, Nova York.
- MISELL D.L. (1978): Practical Methods in Electron Microscopy. Vol.7. "Image Analysis, Enhancement and Interpretation". Ed.:A.M. Glauert. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Nova York, Oxford.
- MONED J.R.DE F., JUVELLS I., VALLMITJANA S., ROS D., Optica Acta (1981) 28 609
- PRATT W.K. (ed.) (1978): Digital Image Processing. John Wiley & Sons, Nova York, Chichester, Brisbane, Toronto.
- RICHARDS P.I., IEEE Spectrum (1967) January 83.
- SALVAT F., PARELLADA J. Treballs de Fisica (1982) 1(3) 47.

SAXTON W.D., FRANK J. Ultramicroscopy (1977) 2 219.

SAXTON W.D. (1978): "Advances in Electronics and Electron Physics. Computer Techniques for Image Processing in Electron Microscopy". Ed.: L.Marton. Academic Press, Nova York, San Francisco, Londres.

UNWIN P.N.T., HENDERSON R., J.Mol.Biol. (1975) 94 425.